

Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2007

Práctica 6 - Geometría axiomática

1. Sea A un plano afín, supongamos que $A \neq \emptyset$. Diremos que $L_1 // L_2$ sii $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ o bien $L_1 = L_2$. Probar:
 - a) La relación $L_1 // L_2$ es una relación de equivalencia.
 - b) A tiene al menos 4 puntos distintos, de los cuales no hay 3 en una misma recta.
 - c) Para todo par de rectas L_1 y L_2 se verifica, $\#L_1 = \#L_2$.
 - d) Dada L una recta cualquiera de A si A es finito, entonces $\#A = (\#L)^2$.
2. Sea \mathbb{P}^2 un plano proyectivo finito con m elementos. Probar que $m = n^2 + n + 1$ donde $n + 1$ es el número de elementos de cualquier recta de \mathbb{P}^2 .
3. Sea k un cuerpo. Demostrar que:
 - a) Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{P}^n(k)$ y el conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}^n(k)$.
 - b) Dado $p \in \mathbb{P}^n(k)$, notemos con p^* al hiperplano correspondiente, y dado H un hiperplano, H^* designa al punto correspondiente. Probar que $p^{**} = p$ y $H^{**} = H$.
4. Sea k un cuerpo finito con q elementos. Hallar la cantidad de:
 - a) puntos en $\mathbb{P}^n(k)$;
 - b) hiperplanos en $\mathbb{P}^n(k)$;
 - c) cónicas en $\mathbb{P}^n(k)$;
 - d) r -planos en $\mathbb{P}^n(k)$ para $r = 0, \dots, n$.
5. Demostrar que si $T \in GL(n + 1, k)$, entonces T induce una transformación $\mathbb{P}(T)$ de $\mathbb{P}^n(k)$ en sí mismo. Pruebe que $\mathbb{P}(T)$ es la identidad sii T es una homotecia no nula. Se define el **gupo lineal proyectivo** $PGL(n + 1, k)$ como $GL(n + 1, k)/k^*$. Demuestre que $PGL(n + 1, k)$ actúa efectiva y transitivamente sobre $\mathbb{P}^n(k)$.
6. Demostrar que dados p_1, \dots, p_{n+2} y q_1, \dots, q_{n+2} conjuntos de puntos de $\mathbb{P}^n(k)$ en posición general (todo conjunto de $n + 1$ de ellos es base), existe un único $\sigma \in PGL(n + 1, k)$ tal que $\sigma(p_i) = q_i \ \forall i$ (la acción es $(n + 2)$ -transitiva).

7. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal de k -espacios vectoriales, y sea $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}V$ la proyección canónica. Probar que f induce una aplicación $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}V \setminus S \rightarrow \mathbb{P}W$ donde $S = \pi(\ker(f) \setminus \{0\})$. En particular, para cada subespacio lineal $V' \subset V$, tomando $S = \pi(V' \setminus \{0\})$ se tiene una aplicación $\mathbb{P}V \setminus S \rightarrow \mathbb{P}(V/V')$ denominada *proyección con centro S* .
8. a) Completación de un plano afín.
 Sea $A = (X, L)$ un plano afín. Vamos a construir un plano proyectivo $\mathcal{A} = (\mathcal{X}, \mathcal{L})$ (agregando a A una recta, “la recta del infinito”). Sea Δ el conjunto de las direcciones de A (clases de equivalencia de rectas bajo la relación de paralelismo). Tomamos $\mathcal{X} = X \cup \Delta$. Para cada recta $\ell \in L$ denotemos $[\ell] \in \Delta$ la clase de equivalencia de ℓ y definamos $\bar{\ell} = \ell \cup \{[\ell]\} \subset \mathcal{X}$ (agregamos a ℓ el punto $[\ell]$). Definimos $\mathcal{L} = \{\bar{\ell} : \ell \in L\} \cup \{\Delta\}$. Demostrar que \mathcal{A} es un plano proyectivo.
- b) Afinización de un plano proyectivo.
 Sea $P = (X, L)$ un plano proyectivo y sea $m \in L$ una recta. Vamos a construir un plano afín $A_m = (P \setminus m, L_m)$ “quitando a P la recta m ”. Para cada recta ℓ en P distinta de m sea $\ell_m = \ell \setminus m \subset P \setminus m$. Definimos $L_m = \{\ell_m : \ell \in L, \ell \neq m\}$. Demostrar que A_m es un plano afín. Demostrar también que si n es otra recta en P entonces A_m y A_n son isomorfos.
- c) Investigar qué sucede al componer las operaciones a) y b).
- d) Sea K un cuerpo y consideremos el plano afín K^2 habitual. Demostrar que la completación de K^2 como en a) es un plano proyectivo isomorfo a $\mathbb{P}^2(K)$.
9. Considere el plano proyectivo sobre un anillo de división k , definido como $\mathbb{P}^2(k) = (k \times k \times k \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$, donde $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ sii existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $\lambda \cdot (x, y, z) = (x', y', z')$. Las rectas de este plano son los subconjuntos $\{[a.p_0 + b.q_0, a.p_1 + b.q_1, a.p_2 + b.q_2] : a, b \in k \setminus \{0\}\}$, aquí $[\]$ denota la clase en el cociente, y $P = [p_0, p_1, p_2]$ $Q = [q_0, q_1, q_2]$ son dos puntos del plano proyectivo. Ésta es la “recta por P y Q ”.
- a) Pruebe que \sim es una relación de equivalencia.
- b) Pruebe que $\mathbb{P}^2(k)$ es un plano proyectivo, y que este plano es Desarguesiano (es decir, cumple la propiedad de Desargues).
- c) Escribiendo el sistema de ecuaciones, pruebe que el plano cumple la propiedad de Pappus sii k es conmutativo.